

달랑베르에서 PINN까지

편미분방정식의 270년 여정

진동하는 줄 한 가닥에서 시작된 이야기가
오늘날 환자의 심장 안 혈류 시뮬레이션과
신경망 기반 수치해석으로 이어지기까지

Crowdy & Claude 대화록

2026년 5월

Contents

1 서문	3
2 장 르 롱 달랑베르라는 인물	3
2.1 어떤 사람이었는가	3
2.2 “구속력은 가상 변위에 대해 일을 하지 않는다”: 달랑베르 원리	3
2.3 그의 일생	4
3 달랑베르의 역설과 파동방정식	4
3.1 달랑베르의 역설	4
3.2 1차원 파동방정식	5
3.3 달랑베르의 해법	5
4 편미분방정식이란 무엇인가	6
4.1 편미분의 의미	6
4.2 파동방정식의 물리적 의미	6
4.3 변수가 많아지는 예	6
5 편미분방정식의 황금기와 난장판	7
5.1 풀이를 둘러싼 18세기의 논쟁	7
5.2 푸리에의 폭탄 (1807, 1822)	7
5.3 푸리에 급수의 원리: 직교성	8
5.4 사각파의 예	8
5.5 19세기의 정리 작업	8
6 나비에-스토크스 방정식	8
6.1 유체의 뉴턴 방정식	8
6.2 역사	9
6.3 밀레니엄 난제	9
7 심혈관 시뮬레이션	9
7.1 왜 어려운 문제인가	9
7.2 시뮬레이션 절차	10
7.3 임상 응용 사례	10
7.3.1 FFRct — 관상동맥 협착 평가	10
7.3.2 뇌동맥류 파열 위험 평가	10
7.3.3 기타 응용	10
7.4 한계	10

8 유한체적법 (FVM)	11
8.1 발상: 보존법칙의 직접 적용	11
8.2 수학적 형식	11
8.3 FEM과의 비교	11
8.4 왜 유체에는 FVM이 표준인가	11
8.5 역사	12
9 물리 정보 신경망 (PINN)	12
9.1 발상의 전환	12
9.2 핵심 트릭: 자동미분	12
9.3 손실 함수: 물리를 학습 목표로	12
9.4 창시자	12
9.5 강점	13
9.6 약점	13
9.7 FVM vs PINN: 연구 현황	13
9.7.1 FVM — 성숙기	13
9.7.2 PINN — 폭발기	13
9.7.3 솔직한 비교	14
10 맺음말	14

1. 서문

이 문서는 18세기 프랑스의 수학자 장 르 롱 달랑베르(Jean le Rond d'Alembert, 1717-1783)에서 시작하여, 그가 던진 진동하는 줄의 문제가 어떻게 푸리에 급수, 나비에-스토크스 방정식, 그리고 현대의 물리 정보 신경망(PINN)으로 이어졌는지를 따라가는 대화의 기록이다.

본 대화의 핵심 주제는 다음과 같다.

- 달랑베르라는 인물과 그의 원리
- 파동방정식과 그 해법
- 편미분방정식의 의미와 푸리에 급수 논쟁
- 나비에-스토크스 방정식과 심혈관 시뮬레이션
- 유한체적법(FVM)과 물리 정보 신경망(PINN)의 비교

2. 장 르 롱 달랑베르라는 인물

2.1. 어떤 사람이었는가

18세기 프랑스 계몽주의를 대표하는 수학자, 물리학자, 철학자이다. 흔히 드니 디드로(Diderot)와 함께 백과전서(*Encyclopédie*)를 공동 편집한 인물로 기억되며, 고전역학에서는 **달랑베르 원리(d'Alembert's principle)**로 그 이름이 남아 있다.

라그랑주가 해석역학을 세우기 전에, 뉴턴의 벡터적 운동방정식을 “에너지·변분” 관점으로 옮겨가는 결정적 다리를 놓은 사람이라고 볼 수 있다.

2.2. “구속력은 가상 변위에 대해 일을 하지 않는다”: 달랑베르 원리

이 문장은 달랑베르 원리의 근본 가정이자, 라그랑주 역학 전체가 작동하는 출발점이다.

구속력(constraint force)은 계의 자유로운 운동을 제한하기 위해 작용하는 힘이다. 예를 들어:

- 책상 위 책에 작용하는 수직항력
- 진자 줄의 장력
- 철사에 꿰어진 구슬에 철사가 가하는 반력
- 강체 내부의 결합력

가상 변위(virtual displacement, δr)는 어떤 한순간에 구속조건과 모순되지 않는 범위에서 가상적으로 허용된 미소 변위를 말한다. 실제 시간 흐름과 무관한, 사고 실험상의 변위이다.

핵심은 이것이다 — 구속력은 거의 항상 **허용된 운동 방향에 수직**으로 작용한다.

- 진자 줄의 장력은 줄 방향이고, 진자추가 움직일 수 있는 방향은 줄에 수직인 호 방향 \Rightarrow 내적이 0

- 책상의 수직항력은 위쪽이고, 책이 미끄러질 수 있는 방향은 수평 \Rightarrow 내적이 0

즉 일 $W = \mathbf{F}_{\text{구속}} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$. 이를 통틀어 **이상적 구속(ideal constraint)**이라 부른다.

이 가정 덕분에 운동방정식

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{외력}} + \mathbf{F}_i^{\text{구속}} - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

에서 구속력 항이 통째로 사라진다. 결과적으로 **구속력을 미리 알지 못해도** 운동방정식을 세울 수 있게 되며, 이 우회로가 곧 라그랑주 방정식과 해밀턴 역학으로 이어진다.

2.3. 그의 일생

버려진 아이로 시작했다. 1717년 11월 16일 파리의 생장르롱(Saint-Jean-le-Rond) 성당 계단에 한 갓난아기가 버려져 있었다. 이름이 없어 성당 이름을 따서 “장 르 룡”이라 불렀다. 생모는 살롱 주인으로 유명했던 탕생 후작부인(Madame de Tencin), 생부는 포병 장교 데투슈(Louis-Camus Destouches)였다. 생모는 평생 그를 외면했지만, 생부는 익명으로 양육비와 교육비를 댔다.

학문적 경로는 빨랐다. 1741년 23세에 파리 과학아카데미 회원이 되었고, 1743년 26세에 발표한 동역학론(*Traité de dynamique*)에서 오늘날 그의 이름이 붙은 원리를 제시했다. 이후 유체역학(달랑베르의 역설), 편미분방정식(파동방정식의 해), 천체역학(춘분점의 세차운동 설명) 등에 굵직한 기여를 남긴다.

계몽주의의 얼굴이 되었다. 1751년부터 디드로와 함께 *백과전서*를 편집했고, 그 유명한 “서설(Discours préliminaire)”을 직접 썼다. 1772년 아카데미 프랑세즈의 종신서기가 된다. 프로이센의 프리드리히 2세와 러시아의 예카테리나 2세가 거듭 자국으로 모셔가려 했지만 모두 거절하고 파리에 머물렀다.

개인적 삶은 외로웠다. 인생의 가장 깊은 애정은 살롱의 안주인 줄리 드 레스피나스(Julie de Lespinasse)에게로 향했지만, 그녀의 마음은 다른 사람들에게 가 있었다. 1776년 그녀가 죽은 뒤 달랑베르는 큰 충격에 빠졌고, 1783년 10월 29일 파리에서 사망했다. 교회의 매장을 거부당해 표지 없는 무덤에 묻혔다 — 성당 계단에서 시작해 무명의 무덤에서 끝난 셈이다.

3. 달랑베르의 역설과 파동방정식

3.1. 달랑베르의 역설

1752년 달랑베르는 *유체의 저항에 관한 새 이론(Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides)*에서 다음 결과를 증명했다.

이상유체(비점성·비압축·정상·비회전 흐름) 속에 놓인 강체는 그것이 어떤 모양이든 항력(drag)을 받지 않는다.

즉 균일한 흐름 속의 공이든 원기둥이든 비행기 모양이든, 이론상으로는 흐름이 가하는 알짜 힘이 0이라는 결론이다. 이것이 “역설”이라 불린 이유는 명백하다 — 강에 손을 담그면 분명히 힘을 받기 때문이다.

이상유체 가정 아래 원기둥 주위의 흐름을 풀어보면, 유선이 **앞뒤로 완전히 대칭**으로 흐른다. 베르누이 방정식에 따라 압력은 속도가 느린 곳(정체점)에서 높고, 빠른 곳에서 낮는데, 이 압력 분포 역시 앞뒤로 똑같이 대칭이다. 압력을 원기둥 표면 전체에 대해 적분하면 앞면과 뒷면이 정확히 상쇄된다.

이 역설은 단순한 계산 오류가 아니라 **이상유체 모델 자체의 결함**을 드러낸 사건이었다. 해결의 실마리는 **점성(viscosity)**, **경계층(boundary layer)**, **후류(wake)**의 세 가지로 모인다. 1904년 프란틀(Ludwig Prandtl)이 결정적 통찰을 내놓는다 — 점성이 아무리 작아도 물체 표면 바로 옆의 얇은 층에서는 점성이 지배적이며, 이 층이 물체 뒤쪽에서 흐름으로부터 **분리(separation)**된다는 것이다.

3.2. 1차원 파동방정식

1747년 달랑베르는 양 끝이 고정된 진동하는 줄(예: 바이올린 현)의 운동을 분석하면서 다음 편미분방정식에 도달했다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

여기서 $u(x, t)$ 는 위치 x , 시간 t 에서 줄의 변위, c 는 파동의 전파 속도이다. 이것이 **1차원 파동방정식**이며, 수리물리학에서 편미분방정식을 본격적으로 사용한 거의 최초의 사례로 꼽힌다.

3.3. 달랑베르의 해법

달랑베르의 천재성은 풀이 방법에 있었다. 그는 다음 새 좌표를 도입했다.

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

연쇄법칙을 적용하면 파동방정식이 놀랍도록 간단한 형태로 변한다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

이를 적분하면 일반해가 단번에 나온다.

달랑베르의 해

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

물리적 의미는 직관적이다.

- $f(x - ct)$: 형태를 유지한 채 **오른쪽으로 속도 c 로 이동**하는 파동
- $g(x + ct)$: 형태를 유지한 채 **왼쪽으로 속도 c 로 이동**하는 파동

즉, 모든 1차원 파동은 좌우로 진행되는 두 파동의 중첩으로 표현된다.

초기조건 $u(x, 0) = \phi(x)$ 와 $u_t(x, 0) = \psi(x)$ 가 주어진 무한히 긴 줄의 경우 명시적 공식은 다음과 같다.

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x - ct) + \phi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \quad (2)$$

4. 편미분방정식이란 무엇인가

4.1. 편미분의 의미

고등학교 미분 $\frac{dy}{dx}$ 는 변수가 x 하나뿐이다. 그런데 진동하는 줄의 변위 u 는 두 가지에 따라 달라진다
— 위치 x 와 시간 t .

이 경우 “변화율”도 두 종류가 필요하다.

- $\frac{\partial u}{\partial t}$: 한 위치를 고정하고 시간만 흐르게 둘 때 변위의 변화율 = 그 점의 속도
- $\frac{\partial u}{\partial x}$: 시간을 정지시키고 줄을 따라 옆으로 이동할 때 변위의 변화율 = 그 순간 줄 모양의 기울기

d 대신 ∂ (라운드디)를 쓰는 이유는 “다른 변수는 잠시 상수로 고정하고, 하나만 변화시킨 미분”임을 표시하기 위해서다. 이를 편미분(partial derivative)이라고 부른다.

4.2. 파동방정식의 물리적 의미

식 (1)이 말하는 바는 다음과 같다.

줄의 한 점이 받는 가속도는, 그 점에서 줄이 휘어진 정도에 비례한다.

직관적으로, 줄을 살짝 잡아당겨 놓으면 그 부분만 볼록하게 휘어 있고, 양옆의 줄이 원래대로 펴려고 잡아당긴다(장력 때문). 많이 휘어 있을수록 더 세게 잡아당기고, 더 큰 가속도를 만든다.

사실상 뉴턴의 $F = ma$ 를 줄의 모든 점에 동시에 적용한 식이다.

4.3. 변수가 많아지는 예

편미분방정식의 변수 개수는 “그 현상을 위치 지정하는 데 필요한 좌표의 개수”에 해당한다.

3차원 열방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

차원의 저주(curse of dimensionality): 변수가 늘 때마다 메쉬 기반 계산량이 기하급수적으로 늘어나기 때문에, 다입자 양자역학이나 단백질 시뮬레이션에서는 정확한 해가 사실상 불가능하고 근사법이나 신경망을 동원한다.

현상	변수 개수	변수
진동하는 줄 (1차원 파동)	2	x, t
가는 막대의 열 전도	2	x, t
진동하는 막 (북)	3	x, y, t
3차원 열 전도, 전자기파	4	x, y, z, t
유체역학 (나비에-스토크스)	4	x, y, z, t
두 입자 양자역학	7	$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t$
볼츠만 방정식	7	위치 3 + 속도 3 + 시간 1
단백질의 양자 기술	수만 개	모든 원자의 좌표 + 시간

Table 1: 여러 물리 현상의 편미분방정식 변수 수

5. 편미분방정식의 황금기와 난장판

달랑베르 이후 약 150년은 편미분방정식 풀이의 난장판이라 할 만했다. 그러나 이 난장판이 현대 수학과 물리학을 만들었다.

5.1. 풀이를 둘러싼 18세기의 논쟁

달랑베르(1747): 매끄러운 함수만 해로 인정.

오일러(1748): 손가락으로 줄을 꺾어 튕긴 V자 모양도 해여야 한다고 반박. 함수 개념 자체의 확장을 도발.

다니엘 베르누이(1753): 완전히 다른 해를 들고 등장한다.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \tag{3}$$

모든 진동이 기본 진동과 그 정수배 배음들의 무한 합으로 표현된다는 발상.

라그랑주(1759): 줄을 N 개의 작은 입자가 연결된 것으로 보고 풀어, $N \rightarrow \infty$ 극한에서 베르누이의 해에 거의 도달하지만 마지막 단계에서 멈춘다.

5.2. 푸리에의 폭탄 (1807, 1822)

장 바티스트 푸리에가 열방정식을 풀면서 무자비하게 선언한다.

“임의의 함수는 사인과 코사인의 무한 합으로 표현된다. 이상.”

1807년 파리 과학아카데미에 제출된 그의 논문은 라그랑주를 포함한 심사위원들에게 거부당한다. 흥미로운 사실 — 라그랑주는 푸리에가 어렸을 때 군사학교 교관이었다. 자기가 가르친 학생의 논문을 30년 뒤 심사위원으로 거부한 셈이다.

5.3. 푸리에 급수의 원리: 직교성

3차원 공간에서 임의의 벡터를 x, y, z 축 성분으로 분해할 수 있는 것처럼, 사인과 코사인 함수들 $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$ 이 서로 직교하는 무한 차원의 좌표축 역할을 한다.

함수의 “내적”은 곱해서 적분하는 것으로 정의되며, 한 주기에 걸쳐 적분해보면

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

임의 함수 $f(x)$ 의 분해:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (4)$$

계수는 다음 공식으로 얻는다.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

5.4. 사각파의 예

뾰족한 사각파를 매끄러운 사인 함수들의 합으로 표현하면:

$$\text{사각파}(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right]$$

항을 늘릴수록 사각파에 가까워지지만, 불연속점 근처에 약 9%의 오버슈트가 끝까지 남는다. 이를 깃스 현상(Gibbs phenomenon)이라 한다.

5.5. 19세기의 정리 작업

푸리에가 옳다는 것을 엄밀하게 증명하기 위해 함수, 극한, 적분의 정의를 다시 세워야 했다.

- 코시 (1820년대): 극한과 연속성의 엄밀한 정의
- 디리클레 (1829): 푸리에 급수의 수렴 조건, 함수의 현대적 정의
- 리만 (1854): 리만 적분
- 르베그 (1902): 르베그 적분, L^2 공간
- 소볼레프 (1930년대): 약한 도함수
- 슈바르츠 (1945): 초함수(distribution), 디랙 델타의 엄밀한 미분

6. 나비에-스토크스 방정식

6.1. 유체의 뉴턴 방정식

비압축성 유체의 나비에-스토크스 방정식:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f} \quad (5)$$

질량 보존 조건:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (6)$$

식의 구조는 **질량** × **가속도** = **힘들의 합**이다.

좌변: ma

- ρ : 유체 밀도
- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: 지역 가속도
- $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$: 대류 가속도 (비선형 항)

우변: **힘들**

- $-\nabla p$: 압력차에 의한 힘
- $\mu \nabla^2 \vec{v}$: 점성에 의한 힘
- \vec{f} : 외부 힘(중력 등)

6.2. 역사

클로드 루이 나비에(1785–1836)가 1822년에 처음 유도. 조지 가브리엘 스토크스(1819–1903)가 1845년에 응력텐서를 이용한 명료한 재유도. 두 사람의 이름이 모두 붙은 이유다.

6.3. 밀레니엄 난제

2000년 클레이 수학연구소가 7대 밀레니엄 난제 중 하나로 선정했다.

3차원 공간에서, 매끄러운 초기 조건이 주어졌을 때, 나비에-스토크스 방정식의 해가 항상 매끄럽게 영원히 존재하는가? 아니면 유한한 시간 안에 해가 폭발(blow-up)할 수 있는가?

상금은 100만 달러. 비선형 항 $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ 때문에 중첩 원리가 성립하지 않으며, 이게 **난류(turbulence)**의 본질이다. 리처드 파인만은 난류를 “고전물리학에 남은 가장 중요한 미해결 문제”라 불렀다.

7. 심혈관 시뮬레이션

7.1. 왜 어려운 문제인가

혈관 안의 흐름은 나비에-스토크스 방정식의 가장 도전적인 응용 중 하나다.

혈관의 복잡성: 대동맥 직경 2–3 cm, 모세혈관 5–10 μm 로 3000배 이상의 스케일 차이. 혈관벽은 탄성이 있어 유체-구조 상호작용(FSI)으로 풀어야 한다.

혈액의 복잡성: 적혈구·백혈구·혈소판이 떠 있는 **현탁액**이며, 변형률에 따라 점성이 달라지는 비뉴턴 유체.

시간적 변화: 심박동에 의한 맥동성(pulsatile) 흐름.

7.2. 시뮬레이션 절차

1. **영상화**: CT 혈관조영술(CTA) 또는 MRA로 3D 영상 획득
2. **메쉬 생성**: 수백만~수천만 셀의 3D 메쉬 구축
3. **경계조건**: 입구는 측정된 속도 프로파일, 출구는 0D 회로 모델
4. **수치해석**: 매 시간 단계마다 모든 셀에서 나비에-스토크스 방정식 해석
5. **임상 해석**: 벽전단응력(WSS), 압력 분포, 진동 전단지수(OSI), 유선과 와류 등 분석

7.3. 임상 응용 사례

7.3.1. FFRct — 관상동맥 협착 평가

HeartFlow사의 대표적 상용 사례. 전통적 침습 카테터 검사 대신, **CT 영상만으로** 나비에-스토크스 방정식을 풀어 FFR(Fractional Flow Reserve) 값을 추정한다. 미국 FDA 승인, 영국 NHS, 일본 보험 적용.

7.3.2. 뇌동맥류 파열 위험 평가

크기와 모양만으로 부족하므로, 동맥류 내부의 혈류 시뮬레이션으로 다음을 평가한다.

- 낮고 진동하는 벽전단응력 (파열 위험 증가)
- 동맥류 내 복잡한 와류 패턴
- 좁고 빠른 입구 제트

7.3.3. 기타 응용

- 대동맥 박리·동맥류 추적 관찰
- 선천성 심장병의 가상 수술 계획 (폰탄 수술 등)
- TAVR 인공판막 설계 및 환자별 맞춤
- 스텐트 설계 및 시술 계획

7.4. 한계

- 정밀 FSI는 환자 한 명당 수 시간~수일 소요
- 경계조건의 측정 불확실성
- 혈관벽의 비등방성·점탄성 모델링
- 일부 병적 상황의 난류

8. 유한체적법 (FVM)

8.1. 발상: 보존법칙의 직접 적용

FVM의 핵심 발상:

미분방정식을 풀지 말고, 각 작은 부피 안에서 보존법칙을 직접 적용하자.

공간을 작은 제어체적(control volume)으로 쪼개고, 각 셀마다 다음을 강제한다.

셀 안 양의 변화율 = 셀 면을 통해 들어오는 플럭스의 합

8.2. 수학적 형식

질량 보존 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 을 셀 부피 V 에 대해 적분하면 가우스 정리에 의해

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

이산화하면

$$\sum_f \vec{v}_f \cdot \vec{n}_f \cdot A_f = 0$$

각 면에서 빠져나가는 양의 합이 0이라는 것이다.

8.3. FEM과의 비교

	유한요소법 (FEM)	유한체적법 (FVM)
무엇을 근사하나	해 자체를 다항식의 합으로 표현	셀에서 들어오고 나가는 플럭스
미지수 위치	절점(꼭짓점)	셀 중심
출발점	변분 원리, 약한 형식	보존법칙의 적분 형식
보존성	자동 보장 안 됨	이산화 단계에서 자동 보장
복잡한 형상	매우 강함	가능하지만 까다로움
주된 응용	구조역학, 고체역학	유체역학, 열전달, 충격파

Table 2: FEM과 FVM의 비교

8.4. 왜 유체에는 FVM이 표준인가

1. **질량 보존:** 비압축성 유체에서 메쉬 수준 보존 자동 보장
2. **불연속 처리:** 충격파, 급격한 압력 변화에 강건
3. **디버깅 용이:** 회계 장부 비유의 명료함

ANSYS Fluent, OpenFOAM, Star-CCM+ 등 주요 CFD 솔버가 모두 FVM 기반이다.

8.5. 역사

FEM: 1940–50년대 항공우주공학에서 시작(보잉). 1960년대 수학적 이론 정립.

FVM: 1970년대 패탱카(Suhas Patankar)의 *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*(1980)로 표준화. SIMPLE 알고리즘 등.

9. 물리 정보 신경망 (PINN)

9.1. 발상의 전환

기존 수치해석은 메쉬를 만들고 각 셀에서 미지수를 정의하지만, PINN은 다르다.

해 $u(x, t)$ 자체를 신경망 $u_\theta(x, t)$ 로 직접 표현한다.

여기서 θ 는 신경망의 가중치다. 메쉬도 셀도 요소도 없다. 입력 (x, t) 를 받으면 출력 u 가 나오는 매끄러운 함수일 뿐이다. 푸리에가 사인·코사인을 기저로 함수를 펼친 것의 현대판이며, 기저가 신경망의 비선형 변환으로 바뀐 셈이다.

9.2. 핵심 트릭: 자동미분

신경망은 미분 가능한 함수다. 입력에 대한 출력의 미분을 컴퓨터가 정확히 계산할 수 있다. 따라서 $\frac{\partial u_\theta}{\partial t}$ 나 $\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}$ 같은 도함수를 수치 차분 같은 근사 없이 정확히 얻을 수 있다. 이게 PINN을 가능하게 만든 핵심 기술이다.

9.3. 손실 함수: 물리를 학습 목표로

PINN은 물리 법칙 자체를 손실 함수로 만든다. 도메인 안의 점들에서 방정식 잔차를 측정:

$$L_{\text{physics}} = \frac{1}{M} \sum_j \left| \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}(x_j, t_j) - c^2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}(x_j, t_j) \right|^2$$

여기에 초기조건·경계조건 손실, 데이터 손실을 더해 전체 손실:

$$L = \lambda_1 L_{\text{data}} + \lambda_2 L_{\text{physics}} + \lambda_3 L_{\text{IC}} + \lambda_4 L_{\text{BC}}$$

경사하강법으로 이를 최소화하면, 신경망이 방정식과 경계조건을 동시에 만족하는 함수로 학습된다.

9.4. 창시자

마이지(Maziar Raissi), 페르디카리스(Paris Perdikaris), 카르니아다키스(George Karniadakis)의 2017–2019년 일련의 논문, 특히 2019년 *Journal of Computational Physics* 논문이 결정적이었다.

9.5. 강점

- **역문제(inverse problem):** 관측 데이터로부터 미지 파라미터 추정에 강력
- **메쉬 프리:** 복잡한 도메인에서 메쉬 생성 불필요
- **차원의 저주에 강함:** 고차원 PDE에서 강점
- **연속 해:** 임의의 점에서 즉시 값과 도함수 계산
- **데이터와 물리의 자연스러운 결합**

9.6. 약점

- **훈련 어려움:** 손실 가중치 균형 문제
- **정확도:** 잘 정립된 문제에서는 FEM/FVM이 보통 더 정확
- **충격파·난류:** 매끄러움 가정 때문에 불연속에 약함
- **재훈련 필요:** 새 문제마다 처음부터 훈련
- **이론적 보장:** 수렴성·안정성·오차 한계 이론이 아직 미완성

9.7. FVM vs PINN: 연구 현황

9.7.1. FVM — 성숙기

이론은 1970–90년대에 정립. 현재는 **점진적 개선**이 중심:

- 적응형 메쉬 미세화(AMR)
- 고차 정확도 스킴
- GPU 병렬화, 엑사스케일 컴퓨팅
- 불연속 갈라진법 같은 하이브리드

ANSYS Fluent, OpenFOAM 등 산업 표준 솔버 정착. 연간 수십억 달러 규모의 CFD 시장.

9.7.2. PINN — 폭발기

2019년 원조 논문 이후 매년 거의 두 배씩 논문 증가. 활발한 방향:

- **변형들:** XPINN(도메인 분할), cPINN(보존형), fPINN(분수 미분), gPINN(그라디언트 강화), VPINN(변분형) 등
- **신경 연산자:** DeepONet, Fourier Neural Operator(FNO) — PDE의 해 연산자 자체를 학습해 재훈련 문제를 해결
- **기초공업체:** DeepXDE, NVIDIA Modulus(이전 SimNet)
- **응용 확장:** 의학, 기후, 재료, 양자화학, 금융

9.7.3. 솔직한 비교

연구 활동의 양과 신규성: PINN/신경 연산자가 압도적으로 활발.

산업 활용도: 여전히 FVM이 압도적. 비행기 설계, 자동차 공력, 환자 진단 등 실용 도구는 거의 모두 FVM/FEM 기반.

관계: 대결이 아니라 **상호 보완**. 신경망을 FVM의 가속기로 사용하거나, FVM이 정답을 만들고 PINN이 학습해 추론을 단축시키는 방향.

10. 맺음말

달랑베르가 1747년에 던진 진동하는 줄 한 가닥은, 270년이 지난 지금까지도 인류 수학과 공학의 흐름을 결정짓고 있다.

이 여정의 마디들을 다시 짚어보면:

- 1747년 — 달랑베르가 파동방정식과 그 해 $u = f(x - ct) + g(x + ct)$ 제시
- 1822년 — 푸리에가 “임의의 함수는 사인·코사인의 합” 선언
- 1822/1845년 — 나비에·스토크스가 유체 방정식 정립
- 1904년 — 프란틀의 경계층 이론이 달랑베르의 역설 해결
- 1970년대 — 패탱카의 FVM이 CFD의 표준으로
- 2000년 — 클레이 연구소가 나비에-스토크스를 100만 달러 난제로
- 2019년 — 카르니아다키스 등이 PINN 프레임워크 정립
- 현재 — 신경 연산자, 머신러닝과 전통 수치해석의 융합

라그랑주의 다항식 기저, 푸리에의 사인·코사인 기저를 지나, 21세기는 **신경망이라는 새로운 기저**로 함수를 표현하는 시대로 들어선 셈이다. 본질은 250년 전 달랑베르가 던진 질문과 같다.

매끄럽지 않은 자연 현상을, 어떤 매끄러운 도구들의 조합으로 표현할 것인가?

성당 계단에 버려진 갓난아기에서 시작된 이야기가, 오늘 환자의 심장 안 혈류를 보는 도구와 인공지능 시대의 새로운 수치해석으로 이어지고 있다. 진동하는 줄 한 가닥의 긴 메아리이다.